Modèle de Plackett-Luce

Tutoriel

Loïc Adam

Laboratoire Heudiasyc - Université de Technologie de Compiègne

19 janvier 2021

Table des matières

1. Rangements
2. Modèle de Plackett-Luce
3. Inférence statistique
4. Apprentissage automatique

Plan

1. Rangements
2. Modèle de Plackett-Luce
3. Inférence statistique
4. Apprentissage automatique

Rangements

- Un rangement est une relation d'ordre total strict d'alternatives, représentés par des étiquettes $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$:

$$\begin{aligned}
\text{Antisymétrie} &: x \succ y \Rightarrow y \not\succ x && \forall x, y \in E \\
\text{Antiréflexive} &: x \not\succ x && \forall x \in E \\
\text{Transitivité} &: x \succ y \wedge y \succ z \Rightarrow x \succ z && \forall x, y, z \in E \\
\text{Relation totale} &: x \succ y \vee y \succ x && \forall x, y \in E
\end{aligned}$$

- Identifiable à une permutation π.

Définition rangement

- Soit des croque-monsieurs {jambon, fromage, poisson, canard}.
- Mon rangement : (canard, fromage, jambon, poisson).

  - Croque au canard préféré à tous.
  - Croque au fromage préféré au jambon et poisson, mais pas au canard.
  - Croque au poisson qui n'est préféré à aucun autre.
  - Entre canard et jambon : canard.

Complexité

- Objectif : pour déterminer le meilleur rangement, il faut trouver le rangement avec la probabilité maximale : $arg_{\pi \in \Pi} \max P(\pi|\nu)$.
- Approche brute : énumérer tous les rangements :
  - Rangements de 4 éléments : 24 différents, facile !
  - Rangements de 10 éléments : 3 628 800 différents, difficile...
  - En général : $n!$ rangements de n éléments, complexité exponentielle.
- Nécessaire de simplifier le problème par différentes méthodes !

Méthodes

- Deux approches classiques :
  - Réduction du problème : un ou plusieurs classificateurs binaires. Par exemple : un par paire d'étiquettes (Hüllermeier et al., 2008).
  - Utiliser un modèle statistique qui permet de déterminer la probabilité de chaque rangement. Plusieurs modèles (Marden, 1996).
- Deuxième approche préférée ici : minimiser l'erreur de classification des classificateurs binaires ne revient pas toujours à déterminer le rangement avec la plus grande probabilité (Hüllermeier, Fürnkranz, 2010).

Deux modèles statistiques

- Le modèle de Mallows (Mallows, 1957), distance entre les rangements :

$$P(\pi|\theta,\theta_0) = \frac{\exp(-\theta D(\pi,\pi_0))}{\phi(\theta)},$$

  $\theta_0 \in \Pi$ la localisation, θ la dispersion, $\phi(\theta)$ un facteur de normalisation, D une distance. Lien avec une distribution normale.

- Le modèle de Plackett–Luce (Luce, 1959 ; Plackett, 1975), comparaison entre paires :

$$P(\pi|\nu) = \prod_{m=1}^{M} \frac{\nu_{\pi(m)}}{\sum_{j=m}^{M} \nu_{\pi(j)}},$$

  nous y reviendrons plus tard.

Pourquoi le modèle de Plackett–Luce ?

- Modèle se basant sur de bonnes bases théoriques, notamment dans la théorie des préférences.
- Plutôt simple de compréhension.
- Bonnes performances, semblables au modèle de Mallows quand les rangements sont complets...
- ... Mais meilleures pour les rangements partiels, c'est-à-dire les rangements avec des étiquettes manquantes : le modèle de Mallows est alors complexe en temps de calcul.

Plan

1. Rangements
2. Modèle de Plackett-Luce
3. Inférence statistique
4. Apprentissage automatique

Axiome du choix de Luce

- L'axiome du choix de Luce (Luce, 1959) : le choix d'un objet parmi une sélection d'objets ne dépend pas de la présence ou l'absence d'autres objets dans la sélection.
- Exemple : si au CROUS je préfère leur quiche à leur bruschetta, l'ajout d'une nouvelle option au menu ne me fera jamais prendre la bruschetta.
- Mathématiquement, la probabilité de prendre i parmi j objets est :

$$P(i) = \frac{\nu_i}{\sum_j \nu_j},$$

où ν indique le poids d'un objet.

Axiome du choix de Luce : compléments

- La fonction softmax, notamment utilisée dans les réseaux de neurones pour attribuer une probabilité aux classes prédites, se base dessus :

$$\sigma(z)_j = \frac{e^{z_j}}{\sum_{k=1}^{K} e^{z_k}}.$$

- Cet axiome n'est pas toujours vérifié dans la vraie vie...
  Exemple : un électeur du parti X voudra voter pour le candidat X plutôt que le candidat Y. Mais si un candidat Z apparaît, il est possible qu'il vote Y pour faire barrage à Z, si Y à plus de chance de gagner que X.

Modèle de Plackett–Luce

- Soit M objets à classer, le modèle de Plackett–Luce est la succession de M choix de Luce, sans remise :

$$P(o_1 > o_2 > ... > o_M) = \frac{\nu_{o_1}}{\nu_{o_1} + ... + \nu_{o_M}} \frac{\nu_{o_2}}{\nu_{o_2} + ... + \nu_{o_M}} ... \frac{\nu_{o_M}}{\nu_{o_M}}.$$

- Modèle paramétrique à M paramètres, des forces $\nu_i \in [0, 1]$ ($\sum_i \nu_i = 1$ par convention), indiquant la préférence globale des objets :

$$P(\pi|\nu) = \prod_{m=1}^{M} \frac{\nu_{\pi(m)}}{\sum_{j=m}^{M} \nu_{\pi(j)}},$$

où $\nu_{\pi(i)}$ est la force de l'objet classé en $i$ème position.

Modèle de Plackett–Luce : compléments

- Généralisation du modèle de Bradley-Terry (Bradley, Terry, 1952). Le modèle de Bradley-Terry permet de comparer deux objets :

$$P(i > j) = \frac{\nu_i}{\nu_i + \nu_j}.$$

- Le modèle de Plackett-Luce possède $M - 1$ degrés de liberté.

Exemple : modèle de l'urne

- Exemple : un nombre infini de boules dans une urne, chaque boule ayant une couleur (rouge, bleue ou verte) et chaque couleur a une fréquence ν_i. Boule remise si la couleur a déjà été prise :

$$P(\pi = (r, b, v)|\nu) = \frac{\nu_r}{\nu_r + \nu_b + \nu_v} \frac{\nu_b}{\nu_b + \nu_v} \frac{\nu_v}{\nu_v}.$$

Si on prend $\nu_r = 0.6,\ \nu_b = 0.3,\ \nu_v = 0.1$:

Exemple : modèle de l'urne

- Exemple : un nombre infini de boules dans une urne, chaque boule ayant une couleur (rouge, bleue ou verte) et chaque couleur a une fréquence ν_i. Boule remise si la couleur a déjà été prise :

$$P(\pi = (r, b, v)|\nu) = \frac{\nu_r}{\nu_r + \nu_b + \nu_v} \frac{\nu_b}{\nu_b + \nu_v} \frac{\nu_v}{\nu_v}.$$

Si on prend $\nu_r = 0.6,\ \nu_b = 0.3,\ \nu_v = 0.1$:

$$\begin{aligned} P(\pi|\nu) &= \frac{0.6}{0.6 + 0.3 + 0.1} \frac{0.3}{0.3 + 0.1} \frac{0.1}{0.1}, \\ &= 0.6 \times 0.75 \times 1, \\ &= 0.45 \end{aligned}$$

Plan

1. Rangements
2. Modèle de Plackett-Luce
3. Inférence statistique
4. Apprentissage automatique

Détermination des poids

- Soit K rangements $\pi = \{\pi_1, ..., \pi_K\}$ ayant chacun M_i étiquettes. Il est possible d'inférer ν à partir de la fonction de vraisemblance :

$$L(\nu|\pi) = P(\pi|\nu) = \prod_{i=1}^{K} \prod_{m=1}^{M_i} \frac{\nu_{\pi_i(m)}}{\sum_{j=m}^{M_i} \nu_{\pi_i(j)}}.$$

- Obtenir le maximum de vraisemblance (solution unique) est réalisable notamment avec l'algorithme de minorisation-maximisation (Hunter, 2004), une généralisation de l'algorithme EM, convergeant prouvablement vers ν^*.
- Idéalement l'inférence se fait avec des rangements complets, mais des rangements partiels sont aussi acceptés, avec des étiquettes inconnues.

Application : inférence

Objectif : utiliser le modèle de Plackett-Luce pour déterminer le meilleur abruti de la classe supérieure de l'année sur plusieurs courses.

Données

- 5 participants :
  - Vivian Smith-Smythe-Smith,
  - Simon Zinc-Trumpet-Harris,
  - Nigel Incubator-Jones,
  - Gervaise Brook-Hampster,
  - Oliver St John-Mollusc.
- 3 courses durant lesquelles les 5 candidats sont rangés par ordre d'arrivée.

Lors d'une prochaine course, sur quel tiercé devrions-nous parier ?

Courses

	1	2	3	4	5
Course 1	Nigel	Gervaise	Simon	Vivian	Oliver
Course 2	Vivian	Nigel	Gervaise	Oliver	Simon
Course 3	Gervaise	Nigel	Vivian	Oliver	Simon

TABLE – Résultats des courses

Courses

	1	2	3	4	5
Course 1	Nigel	Gervaise	Simon	Vivian	Oliver
Course 2	Vivian	Nigel	Gervaise	Oliver	Simon
Course 3	Gervaise	Nigel	Vivian	Oliver	Simon

TABLE – Résultats des courses

$$
\begin{aligned}
L(\nu|\pi) &= \prod_{i=1}^{3}\prod_{m=1}^{5} \frac{\nu_{\pi_i(m)}}{\sum_{j=m}^{5} \nu_{\pi_i(j)}} \\
&= \left[\nu_N \ \frac{\nu_G}{\nu_G+\nu_S+\nu_V+\nu_O} \ \frac{\nu_S}{\nu_S+\nu_V+\nu_O} \ \frac{\nu_V}{\nu_V+\nu_O}\right] \\
&\times \left[\nu_V \ \frac{\nu_N}{\nu_N+\nu_G+\nu_O+\nu_S} \ \frac{\nu_G}{\nu_G+\nu_O+\nu_S} \ \frac{\nu_O}{\nu_O+\nu_S}\right] \\
&\times \left[\nu_G \ \frac{\nu_N}{\nu_N+\nu_V+\nu_O+\nu_S} \ \frac{\nu_V}{\nu_V+\nu_O+\nu_S} \ \frac{\nu_O}{\nu_O+\nu_S}\right].
\end{aligned}
$$

Trouver v qui maximise cette fonction : ordinateur ou un stagiaire motivé...

Résultats

	1	2	3	4	5
Course 1	Nigel	Gervaise	Simon	Vivian	Oliver
Course 2	Vivian	Nigel	Gervaise	Oliver	Simon
Course 3	Gervaise	Nigel	Vivian	Oliver	Simon

TABLE – Résultats des courses

- Résultats :
  - Nigel : 0.54,
  - Gervaise : 0.33,
  - Vivian : 0.10,
  - Oliver : 0.02,
  - Simon : 0.01.

Résultats

	1	2	3	4	5
Course 1	Nigel	Gervaise	Simon	Vivian	Oliver
Course 2	Vivian	Nigel	Gervaise	Oliver	Simon
Course 3	Gervaise	Nigel	Vivian	Oliver	Simon

TABLE – Résultats des courses

- Résultats :
  - Nigel : 0.54,
  - Gervaise : 0.33,
  - Vivian : 0.10,
  - Oliver : 0.02,
  - Simon : 0.01.

$$P(\pi = \{\mathrm{N},\ \mathrm{G},\ \mathrm{V},\ \mathrm{O},\ \mathrm{S}\}) = 0.32$$

Plan

1. Rangements
2. Modèle de Plackett-Luce
3. Inférence statistique
4. Apprentissage automatique

Exemple simple

Individu	Objet préféré	Objet moins préféré	Objet détesté
John	Fromage	Viande	Perroquet
Michael	Perroquet	Fromage	Viande
Terry	Viande	Fromage	Perroquet

TABLE – Exemple de rangements de préférences

Individu	Sérénité	Amour-propre
John	Nerveux	Trop
Michael	Calme	Trop
Terry	Nerveux	Peut-être

TABLE – Exemple de caractéristiques d'individus

Nouvel individu Graham : calme et sans trop d'amour propre

Exemple simple

Individu	Objet préféré	Objet moins préféré	Objet détesté
John	Fromage	Viande	Perroquet
Michael	Perroquet	Fromage	Viande
Terry	Viande	Fromage	Perroquet

TABLE – Exemple de rangements de préférences

Individu	Sérénité	Amour-propre
John	Nerveux	Trop
Michael	Calme	Trop
Terry	Nerveux	Peut-être

TABLE – Exemple de caractéristiques d'individus

Nouvel individu Graham : calme et sans trop d'amour propre $\Rightarrow$

$$\text{Perroquet} \succ \text{Viande} \succ \text{Fromage}.$$

Apprentissage de rangements d'étiquettes

- Association entre une instance $x \in \mathcal{X}$, et un rangement π.
- Différence avec l'apprentissage classique : non pas une ou plusieurs étiquettes à prédire, mais un ordre total strict d'étiquettes.
- Plusieurs algorithmes (Cheng, 2010) :
  - k plus proches voisin, local (une partie de $\mathcal{X}$).
  - Modèle linéaire généralisé, global (tout $\mathcal{X}$).
- Possible avec des rangements partiels (certaines étiquettes sont inconnues).

k plus proches voisins

- Déterminer l'étiquette d'un objet à partir des étiquettes des k plus proches voisins selon une distance (euclidienne le plus souvent).

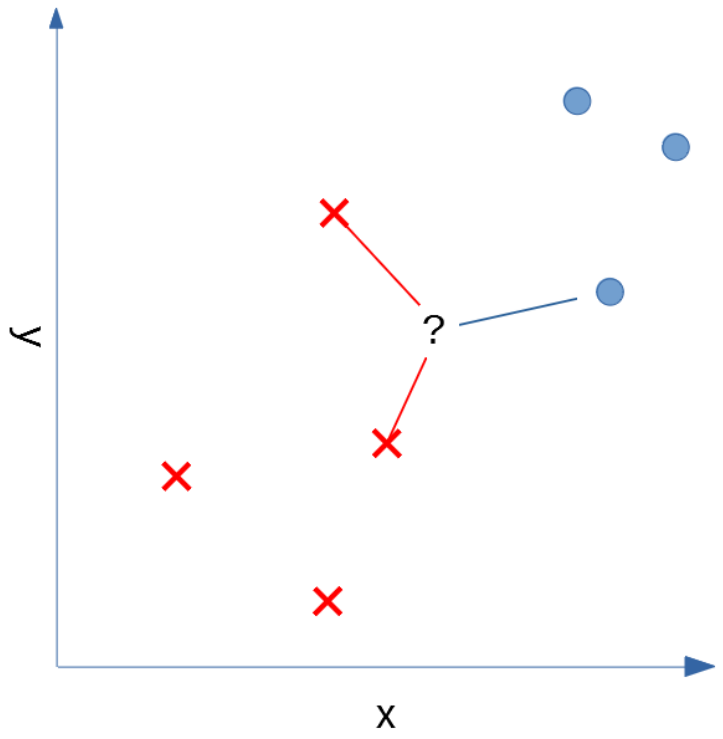

FIGURE – 3 plus proches voisins de ?

k plus proches voisins pour les rangements

- Soit une instance x_w dont on recherche le rangement associé π_w.
- Les k plus proches voisins $x_{(1)}, ..., x_{(k)}$ de x_w sont déterminés selon une distance euclidienne.
- Les rangements (complets ou partiels) $\pi_{(1)}, ..., \pi_{(k)}$ associés sont utilisés pour inférer le vecteur de poids $\hat{\nu}_w$ comme vu dans la partie précédente.
- $\hat{\pi}_w$ est simplement la permutation de $\hat{\nu}_w$ permettant de ranger les poids dans un ordre décroissant : $\nu_3 > \nu_1 > \nu_2 \Rightarrow \hat{\pi}_w = (3, 1, 2)$.

Évaluation

- Plusieurs possibilités pour mesurer la distance entre deux rangements π et σ. Une mesure commune est le Tau-a de Kendall :

$$\tau_a(\pi, \sigma) = \frac{C - D}{M(M-1)/2},$$

M le nombre d'étiquettes dans un rangement, C les paires concordantes entre les deux rangements et D le nombre de paires discordantes.

- Deux paires (π_i, π_j), (σ_i, σ_j) avec $i, j \in E$ sont :
  - Concordantes si $(\pi_i > \pi_j \wedge \sigma_i > \sigma_j)$ ou $(\pi_i < \pi_j \wedge \sigma_i < \sigma_j)$.
  - Discordantes si $(\pi_i > \pi_j \wedge \sigma_i < \sigma_j)$ ou $(\pi_i < \pi_j \wedge \sigma_i > \sigma_j)$.

- Mesure qui retourne une valeur entre 1 ($\pi = \sigma$) et -1 (π est rangé dans le sens inverse de σ).

Mon travail

- Apport du cadre des probabilités imprécises pour obtenir un modèle de Plackett–Luce Imprécis (IPL) avec des poids imprécis. Il est possible de s'abstenir de dire qu'une étiquette est préférée à une autre : le rangement final n'est plus nécessairement total.
- Extension du modèle de vraisemblance : fonction de contour de vraisemblance (ou fonction de vraisemblance relative) (Edwards, 1992) :

$$L^*(\nu) = \frac{L(\ u)}{\max_{\nu \in \Sigma} L(\nu)};$$

  $L^* \in]0, 1]$: plus $L^*(\nu)$ est proche de 1, plus ν est vraisemblable.
- Des « coupes » sont réalisées pour estimer les paramètres imprécis : coupes-bêta.

Conclusion

- Modèle efficace pour faire de l'inférence ou de l'apprentissage sur des rangements d'étiquettes complets ou partiels.
- Bien étudié dans la littérature, assez populaire dans l'apprentissage de préférence, avec de nombreux travaux récents.
- Possible de l'étendre avec le cadre des probabilités imprécises !

Merci de votre attention !